Wyższa Szkoła Pedagogiczna Towarzystwa
Wiedzy Powszechnej

Wydział Nauk Społecznych

E-nauczyciel – reinżynieria kompetencji

Pozycyjne systemy liczbowe – omówienie oraz przykłady.

Autor: Joanna Brzozowska

Praca pisana pod kierunkiem: Jerzego Żemły

Warszawa, grudzień 2010

Spis treści

Wstęp.

Współczesne przetwarzanie informacji jest realizowane w oparciu o elektroniczne maszyny cyfrowe – komputery. Informacja w systemach cyfrowych jest przechowywana w postaci dwuwartościowych sygnałów, nazywanych sygnałami zerojedynkowymi lub binarnymi. Przetwarzanie danych na poziomie układów cyfrowych komputera sprowadza się do wykonywania operacji na liczbach binarnych. Najmniejszą jednostką informacji w elektronicznych układach cyfrowych jest bit.

Bit to jednostka dwójkowa – tak / nie. Można nim zakodować jeden z dwóch alternatywnych stanów: „prawdę” lub „fałsz”; 1 albo 0. Ciąg bitów wystarczy by przekazać dowolną wiadomość np.: za pomocą telegrafu. 8 bitów to bajt. Wartość pojedynczego bajta można opisać używając tylko dwóch cyfr szesnastkowych i odwrotnie – dowolne dwie cyfry szesnastkowe można zapisać jako bajt. W ten sposób kolejne bajty można łatwo przedstawić w postaci ciągu cyfr szesnastkowych. Jednocześnie zapis 4 bitów można prosto przełożyć na jedną cyfrę szesnastkową (Jakubowska, 2002).

Zatem we współczesnym świecie używamy:

1) systemu dziesiątkowego – najbliższy nam, najbardziej rozpowszechniony system liczbowy w życiu codziennym, narzucony przez nas maszynom;
2) systemu dwójkowego – język maszyn stworzonych przez człowieka, prosty, ale wielofunkcyjny;
3) systemu szesnastkowego – język maszyn, skracający sekwencje liczb binarnych, oszczędzający miejsce na nowe informacje.

Pracę rozpoczyna rozdział o pozycyjnym systemie zapisu liczb na podstawie systemu dziesiątkowego. Rozdział drugi poświęcony jest systemowi dwójkowemu. Główną treść rozdziału stanowią działania na liczbach w systemie dwójkowym. Rozdział trzeci zawiera informacje dotyczące systemu szesnastkowego. Rozdział czwarty omawia konwersje zapisu liczb między systemami dziesiątkowym, dwójkowym i szesnastkowym. Informacje z tego rozdziału wykorzystane zostały do stworzenia dwóch scenariuszy. Scenariusze zawierają również zadania do samodzielnego rozwiązania oraz pytania testowe.

1. Pozycyjne systemy liczbowe.

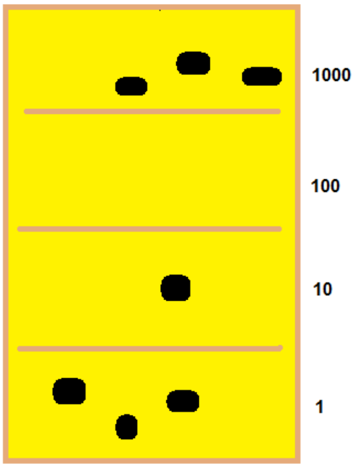
Cyfra to umowny znak pisarski służący do zapisywania liczb. Aby utworzyć liczbę, trzeba zestawić odpowiednie cyfry w umownej kolejności – stworzyć system. Rozróżniamy dwa systemy zapisu liczb: addytywny i dziesiętny.

System rzymski zapisywania liczb jest systemem addytywnym, czyli wartość danej liczby określa się na podstawie sumy wartości jej znaków cyfrowych. Cyfry rzymskie to cyfry pochodzenia etruskiego, które Rzymianie przejęli i zmodyfikowali ok. 500 p.n.e. Cyfry zapisywane są ich skrótami literowymi np.: I – znak pochodzi od pionowej kreski, oznaczającej jedną rzecz; V – znak jest górną połową znaku X; L – jest dolną połową znaku C; C – znak pochodzi od łacińskiego słowa *centum*, czyli *sto*; M – znak pochodzi od łacińskiego słowa *mille*, czyli *tysiąc.* (Krysicki, 1979) Jeżeli w zapisie liczby znak oznaczający cyfrę o większej wartości stoi przed znakiem cyfry o mniejszej wartości lub znaki mają jednakową wartość to wartości cyfr dodajemy (np.: XV = 10 + 5 = 15). Wyjątkiem są liczby: 4, 9, 40, 90, 400 i 900, do opisu których używa się odejmowania. Jeżeli w zapisie liczby znak oznaczający cyfrę o mniejszej wartości stoi przed znakiem cyfry o większej wartości, to wartości cyfr odejmujemy. (np.: CD = 500 - 100 = 400).

System rzymski stosowany był w łacińskiej części Europy do końca średniowiecza. W Polsce cyfr rzymskich do dziś używamy zwyczajowo pisząc i numerując:

- licea (XLVIII Liceum Ogólnokształcące im. Edwarda Dembowskiego)
- wieki (żyjemy w XXI wieku)
- tomy dzieł (Harry Potter, tom V – Zakon Feniksa)
- miesiące w datach (coraz rzadziej – 24 XII 1998r.)
- kolejnych królów (np.: Zygmunt III Waza)
- godziny na zegarze (VI – szósta godzina bądź osiemnasta).

Mimo dosyć skomplikowanego zapisu liczb Rzymianie sprawnie wykonywali proste działania matematyczne, jak dodawanie i odejmowanie. Nie zapisywali swoich rachunków, jak więc liczyli? Do obliczeń służyła im tablica pokryta piaskiem (na której odciskali równoległe i w jednakowych odstępach linie) oraz kamyki. Na rysunku przedstawiona jest liczba MMMXIII (3013). Tablica nazywała się abakus (abak) i była pierwszą na świecie „maszyną do liczenia”. Dodawano



i odejmowano podobnie, jak dziś dzieci dodają i odejmują na liczydłach – rachunki wykonywano w systemie dziesiątkowym. Dziesięć kamieni niższego rzędu to jeden kamień wyższego rzędu. Jeden kamień wyższego rzędu to dziesięć kamieni niższego rzędu. (Krysicki,1979) Mimo używania addytywnego systemu zapisu liczb, Rzymianie wiedzieli, że wykonywanie większości działań jest prostsze w, najbardziej dziś rozpowszechnionym na świecie, dziesiątkowym systemie pozycyjnym.

Zaletą systemów addytywnych jest możliwość zapisu dużych liczb za pomocą małej liczby znaków, a wadą: złożoność, kłopoty interpretacyjne oraz bardzo skomplikowany sposób dokonywania za ich pomocą prostych operacji arytmetycznych.

1.1 Pozycyjny system dziesiątkowy.

„Jest dziewięć znaków hinduskich, oto one: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Za pomocą tych znaków i znaku 0, który po arabsku zwie się „sifr”, można napisać wszelką, jaką kto chce, liczbę”.

„Liber abaci” Leonardo Fibonacci z Pizy, 1202r.

System, w którym liczymy najczęściej, nazywamy dziesiątkowym systemem pozycyjnym. System dziesiątkowy pochodzi z Indii, skąd rozpowszechnił się w Europie za pośrednictwem Arabów. Od XVI wieku stosowano go obok systemu rzymskiego, w nauce, księgowości oraz tworzącej się właśnie bankowości, gdyż system ten znacznie upraszczał operacje arytmetyczne. (Krysicki,1979)

Dziesiątkowy – oznacza, że każda jednostka wyższego rzędu zawiera 10 jednostek rzędu bezpośrednio niższego (np.: 1 tysiąc zawiera 10 setek, 1 setka zawiera 10 dziesiątek). Wyraz „pozycyjny” określa system zapisywania liczb, w którym znaczenie cyfry jest zależne od miejsca (pozycji) zajmowanego przez nią w liczbie. Zmiana pozycji cyfry w liczbie zmienia wartość tej liczby.

Przykład: 10 jedności pierwszego rzędu tworzy jedność drugiego rzędu (dziesiątkę), 10 jedności drugiego rzędu tworzy jedność trzeciego rzędu (setkę) itd.

2	3	8	5
cyfra tysięcy	cyfra setek	cyfra dziesiątek	cyfra jedności

dwa tysiące trzysta osiemdziesiąt pięć

2385 = 2000 + 300 + 80 + 5 =

$= 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 5 \cdot 1 =$

$= 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

Liczbę dziesięć, nazywamy podstawą potęgi. Wykładnik potęgi liczby 10, jak można zauważyć w powyższym zapisie, jest równy liczbie zer następujących po 1 (np.: tysiąc $1000 = 10^3$). Zatem każdą liczbę w systemie dziesiątkowym da się zapisać w postaci:

$\sum_{i=0}^{\infty} w_i \cdot 10^i$; wykorzystując 10 cyfr: $w_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Uogólniając, dowolną liczbę c – całkowitą dodatnią, większą od jedności, możemy zapisać w systemie pozycyjnym o podstawie p, używając p cyfr od 0 do p – 1.

$c = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \cdot p^i$, gdzie p jest podstawą systemu pozycyjnego,

w_i – współczynnikiem ze zbioru {0,1,..., p-1}.

Zaletą systemów pozycyjnych jest ich prostota i jasność zapisu, łatwość dokonywania operacji arytmetycznych oraz możliwość zapisu dowolnie dużej liczby (jednak do zapisu bardzo dużych liczb jest potrzebna duża liczba cyfr).

W informatyce stosowany jest system dwójkowy (binarny) i szesnastkowy (heksadecymalny). Z racji reprezentacji liczb w pamięci komputerów za pomocą bitów, najbardziej naturalnym systemem dla komputera jest dwójkowy system liczbowy.

System dziesiętny został wprowadzony do komputera, gdy powstały języki programowania wyższego poziomu, których celem było jak największe ułatwienie w korzystaniu z komputerów.

Ze względu na specyfikę budowy komputerów, gdzie często najszybszy dostęp jest do adresów parzystych, albo podzielnych przez 4, 8 czy 16, często używany jest szesnastkowy system liczbowy.

1.2 Działania na liczbach w systemie dziesiątkowym

Dodając, odejmując czy mnożąc w systemie pozycyjnym każdą „dziesiątkę” niższego rzędu zamieniamy na jednostkę wyższego rzędu lub odwrotnie.

10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
10000	1000	100	10	1

Przeniesienie („w pamięci”)			*1*	*1*	
dodawanie		2	4	5	1
+			7	7	6
		3	**2**	**2**	**7**

mnożenie			4	5	1
x				7	6
Przeniesienie			*2*	*3*	
		2	7	0	6
Przeniesienie		*3*	*3*		
	3	1	5	7	
+					
Przeniesienie			*1*		
	3	**4**	**2**	**7**	**6**

Tabela 1. Reguła dodawania i mnożenia w systemie dziesiątkowym.

System dziesiętny ma tę zaletę, że wszystkie obliczenia i operacje arytmetyczne są na nim wykonywane w sposób bardzo intuicyjny\(dziesięć palców u rąk). Przedstawienie nawet bardzo dużej liczby nie nastręcza trudności. System dziesiętny używany jest na co dzień i większość ludzi nie ma problemów z wykonywaniem w nim działań.

Dlaczego zatem nie używa się systemu dziesiętnego do komunikacji pomiędzy człowiekiem a maszyną cyfrową, jaką jest komputer? Odpowiedź jest prosta: system bardzo intuicyjny dla człowieka dla maszyny jest po prostu za trudny. Zaprogramowanie w maszynie rozpoznawania dziesięciu różnych cyfr byłoby bardzo nieekonomiczne. Dlatego maszyny komunikują się z człowiekiem i ze sobą za pomocą systemu dużo mniej skomplikowanego – systemu dwójkowego, inaczej binarnego.

2. Dwójkowy system liczbowy.

„Zamiast ciągu geometrycznego na bazie dziesięciu, przez wiele lat stosowałem najprostszy ze wszystkich ciągów, a mianowicie na bazie dwóch, uznając, że przyczynia sie to do doskonałości nauki o liczbach. Nie używam wiec cyfr innych niż 0 i 1, a zatem dochodząc do dwóch zaczynam od początku. Dlatego dwa jest zapisywane tu jako 10, a dwa razy dwa, czyli cztery jako 100, a dwa razy cztery, czyli osiem jako 1000, a dwa razy osiem, czyli szesnaście jako 10000, i tak dalej.”

G. W. Leibniz (za Trzęsicki, 2010)

Dwójkowy system liczbowy (inaczej binarny) to pozycyjny system liczbowy, w którym podstawą jest liczba 2. Do zapisu liczb potrzebne są tylko dwie cyfry: 0 i 1 – jest to układ pozycyjny, który zawiera najmniejszą liczbę cyfr.

Komputer składa się z części elektronicznych. Wymiana informacji polega na odpowiednim przesyłaniu sygnałów. Podstawą elektroniki jest prąd elektryczny, który w układach elektronicznych albo płynie albo nie. Zatem, aby łatwiej było komputerowi rozpoznawać sygnały, interpretuje on płynący prąd jako „1” (jeden), a jego brak jako „0” (zero). Komputer operując odpowiednim ustawieniem, kiedy ma płynąć prąd, a kiedy nie ustawia różne wartości bitów. Procesor konwertuje (zamienia) je na liczby zero i jeden, i w ten sposób powstają czytelne dla użytkownika obrazy, teksty, dźwięk itd. Nie tylko w postaci sygnałów elektrycznych reprezentowane mogą być zera lub jedynki, np.: na płycie CD czy DVD, nagrywarka wypala malutkie wgłębienia – jedynki, poziom płyty to zera.

Wszelkie informacje w maszynach cyfrowych są przedstawiane, jako ciągi zer i jedynek. Naturalne jest więc, wykorzystywanie w komputerach reguł arytmetyki binarnej: 2 jedności pierwszego rzędu tworzy jedność drugiego rzędu, 2 jedności drugiego rzędu tworzy jedność trzeciego rzędu itd.

$$101001_{(2)} = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

2.1 Liczby rzeczywiste w systemie dwójkowym.

W elektronicznych maszynach cyfrowych informacje są przekazywane za pomocą dwóch stanów elektrycznych: „brak napięcia” i „jest napięcie”. Taki dwuwartościowy sposób przedstawiania informacji znany jest jako logika binarna. Stanowi „jest napięcie” odpowiada logiczna jedynka, a „brak napięcia” logiczne 0. Za pomocą odpowiedniej liczby bitów można zakodować w dwójkowym układzie pozycyjnym dowolną liczbę rzeczywistą.

Dla liczb całkowitych trzeba zarezerwować bit na znak liczby – jest to tak zwany standardowy sposób zapisu z bitem znaku.

$7_{(10)} = 0111_{(2)}$ $\qquad\qquad$ $-7_{(10)} = 1111_{(2)}$

Wadą zapisu standardowego jest występująca różna od zera suma dwóch przeciwnych liczb, np.:

dziesiątkowy	**dwójkowy**
7	0111
+ -7	+ 1111
----	------
0	10110

Wady tej nie posiada kod uzupełnieniowy. Zapis matematyczny dowolnej binarnej liczby całkowitej m zapisanej na n bitach to:

dla $m \geq 0$ – liczba w kodzie U2 = m

dla $m < 0$ – liczba w kodzie U2 = $m + 2^n$

Przykład: dla n = 4

m = 7 $\quad 7 = 0111_{(2)}$

m = -7 $\quad -7 = -7 + 2^4 = -7 + 16 = 9 = 1001_{(2)}$

dziesiątkowy	**dwójkowy**
7	0111
+ -7	+ 1001
––––	––––––
0	10000

W praktyce przekształcenie liczby dwójkowej dodatniej na ujemną sprowadza się do zamiany 0 na 1 i 1 na 0 w liczbie dodatniej i dodania do wyniku 1.

Przykład:

7	$\rightarrow$	0111
–––––––––––––––––––		
zamiana	$\rightarrow$	1000
+		0001
		–––––––
-7	$\rightarrow$	1001

Dowolna liczba rzeczywista r może być zapisana w postaci liczby w systemie dwójkowym następująco:

$$r = \pm(w_{n-1}2^{n-1} + w_{n-2}2^{n-2} + ... + w_1 2^1 + w_0 2^0 + w_{-1}2^{-1} + w_{-2}2^{-2} + ...)$$

Przykład:

$$10.5_{(10)} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} = 8 + 2 + 0.5 = 1010.1_{(2)}$$

2.2 Działania na liczbach w systemie dwójkowym.

Działania arytmetyczne w systemie dwójkowym wykonuje się podobnie jak systemie dziesiątkowym. Tabele przedstawiają reguły arytmetyki binarnej.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

-	0	1
0	0	1
1	1	0

x	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabela 2. Reguły dodawania, odejmowania i mnożenia dwójkowego.

dodawanie	odejmowanie	mnożenie
111011 + 1010 ------- 1000101	101001 - 1101 ------- 11100	101001 x 101 ------- 101001 0000000 + 10100100 ------- 11001101

Tabela 3. Przykładowe zastosowanie reguł dodawania, odejmowania i mnożenia dwójkowego.

Mnożenie w systemie dwójkowym wykonuje się tak samo jak w systemie dziesiętnym. W wyniku mnożenia zawsze otrzymamy liczbę 0 lub 1, nie występuje więc konieczność przenoszenia do następnej kolumny. Dopiero w końcowym etapie, przy sumowaniu wyników, postępujemy zgodnie z zasadami dodawania liczb binarnych.

W systemie dwójkowym komputer do wykonania dodawania musi uwzględniać cztery wypadki: 0+0; 0+1; 1+0; 1+1. W wypadku systemu dziesiętnego, urządzenie musiałoby radzić sobie ze 100 wypadkami, co komplikowałoby je technicznie (Trzęsicki, 2010).

Użycie pozycyjnego systemu dwójkowego do przedstawiania liczb oraz dowolnej informacji w maszynie cyfrowej, zapewnia z technicznego punktu widzenia (Wójcik, 2007):

- dużą niezawodność,
- możliwość przetwarzania danych w układach prostej konstrukcji przy małym prawdopodobieństwie występowania błędów;
- możliwość miniaturyzacji maszyn cyfrowych.

Używanie liczb w systemie dwójkowym jest niewygodne ze względu na długość zapisu. Dlatego częściej stosowanym zamiennikiem systemu binarnego jest szesnastkowy (heksadecymalny) system liczbowy.

3. Szesnastkowy system liczbowy

Szesnastkowy system liczbowy (*hexadecimal* – *heksadecymalnym*) to pozycyjny system liczbowy, w którym podstawą jest liczba 16. Do zapisu liczb w tym systemie potrzebne jest szesnaście cyfr. Poza cyframi dziesiętnymi od *0* do *9* używa się pierwszych sześciu liter alfabetu łacińskiego: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*.

Binarny	**Dziesiętny**	**Heksadecymalny**
0000	0	0
0001	1	1
0010	2	2
0011	3	3
0100	4	4
0101	5	5
0110	6	6
0111	7	7
1000	8	8
1001	9	9
1010	10	A
1011	11	B
1100	12	C
1101	13	D
1110	14	E
1111	15	F

Tabela 4. Cyfry w systemie heksadecymalnym i odpowiadające im liczby w systemie dziesiętnym i binarnym.

Szesnastkowy system liczbowy jest właściwy komputerom, ponieważ pozwala na zapis większych liczb w mniejszych przestrzeniach pamięci.

Przykład:

$2^{16} = 65\ 536_{10} = 1.0000_{16}$

$2^{24} = 16\ 777\ 216_{10} = 100.0000_{16}$

$2^{32} = 4\ 294\ 967\ 296_{10} = 1.0000.0000_{16}$

$2^{16}-1 = 65.535_{10} = FFFF_{16}$

$2^{24}-1 = 16.777.215_{10} = FF.FFFF_{16}$

$2^{32}-1 = 4.294.967.295_{10} = FFFF.FFFF_{16}$

Duże liczby w zapisie szesnastkowym są łatwiejsze do zapamiętania.

System szesnastkowy używany jest współcześnie do:

- zapisu adresów MAC (np.: 00:0A:E6:3E:FD:E1)
- zapisu adresów IP w wersji 6 (np.: 3ffe:902:12::/48)
- na stronach WWW (HTML), gdzie stosowany jest do zapisu kolorów (kolory RGB: 3 liczby HEX od 0 do FF – 255).

4. Konwersja liczb między systemami liczbowymi.

4.1 System dwójkowy i dziesiątkowy.

Dwójkowy na dziesiątkowy

Zamianę liczb zapisanych w systemie dwójkowym na dziesiątkowy wykonujemy wykorzystując po prostu definicję zapisu liczby w systemie dwójkowym oraz wartości kolejnych potęg dwójki (Tabela 5):

Potęgi liczby 2	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
Wartości potęg	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Tabela 5. Wartości potęg liczby 2.

$101001_{(2)} = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$

$= 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 =$

$= 32 + 8 + 1 = 41_{(10)}$

Dziesiątkowy na dwójkowy

Przy zamianie liczb decymalnych na binarne wykorzystamy potęgi dwójki (Tabela5).

Przykład:

Dana jest liczba w systemie decymalnym (dziesiątkowym): 173.

Szukamy największej wartości potęgi liczby 2 mieszczącej się w liczbie 173, jest to liczba 128 (wyższa, równa 2^8 = 256 nie mieści się w173).

$2^7 = 128$ $\rightarrow$ **1**

Od liczby 173 odejmujemy wartość potęgi 2^7. Otrzymujemy: 173 – 128 = 45.

Kolejna potęga 2 to $2^6 = 64$ – nie mieści się w 45. $\rightarrow$ **0**

Dalej $2^5 = 32$ – mieści się w 45 $\rightarrow$ **1**

Obliczamy 45 – 32 = 13. Kolejna potęga to: $2^4 = 16$ – nie mieści się w 13 $\rightarrow$ **0**

Następna to $2^3 = 8$ – mieści się w 13 $\rightarrow$ **1**

Otrzymujemy: 13 – 8 = 5.

Obliczamy kolejną potęgę $2^2 = 4$ – mieści się w 5 $\rightarrow$ **1**

Mamy 5 – 4 = 1; $2^1 = 2$ – nie mieści się w 1 $\rightarrow$ **0**

Sprawdzamy ostatnią potęgę: $2^0 = 1$ – mieści się w 1, zatem $\rightarrow$ **1**

Otrzymujemy wartość liczby dziesiętnej **173** w postaci binarnej: **10101101**.

Szybszy sposób zamiany wykorzystuje dzielenie z resztą. Liczbę dzielimy przez 2; jeżeli wynik będzie z resztą zapisujemy 1, jeżeli nie – zapisujemy 0. Następnie znowu dzielimy przez 2 to co zostało z liczby, bez reszty. Powtarzamy, aż zostanie zero. Otrzymane zera i jedynki zapisujemy w odwrotnej kolejności.

173 : 2 = 86 r 1	**1**
86 : 2 = 43 r 0	**0**
43 : 2 = 21 r 1	**1**
21 : 2 = 10 r 1	**1**
10 : 2 = 5 r 0	**0**
5 : 2 = 2 r 1	**1**
2 : 2 = 1 r 0	**0**
1 : 2 = 0 r 1	**1**

Zatem $173_{(10)} = 10101101_{(2)}$

4.2 System szesnastkowy i dziesiątkowy.

Szesnastkowy na dziesiątkowy.

Potęgi liczby 16	16^0	16^1	16^2	16^3	16^4	16^5
Wartości potęg	1	16	256	4096	65536	1048576

Tabela 6. Wartości potęg liczby 16.

Zamianę liczb zapisanych w systemie szesnastkowym na dziesiątkowy wykonujemy, podobnie jak w systemie dwójkowym, wykorzystując definicję zapisu liczby w systemie pozycyjnym oraz wartości kolejnych potęg liczby szesnaście (Tabela 6).

$$E9A_{(16)} = E \cdot 16^2 + 9 \cdot 16^1 + A \cdot 16^0$$
$$= 14 \cdot 256 + 9 \cdot 16 + 10 \cdot 1$$
$$= 3738_{(10)}$$

Dziesiątkowy na szesnastkowy.

Przeliczanie przy pomocy tabeli wartości poszczególnych potęg liczby 16 sprawia sporo trudności, gdyż rosną one bardzo szybko (Tabela 6).

$$3738_{(10)} = 14 \cdot 256 + 9 \cdot 16 + 10 \cdot 1$$

$$E \cdot 16^2 + 9 \cdot 16^1 + A \cdot 16^0 = E9A_{(16)}$$

Dużo prościej do konwersji wykorzystać dzielenie z resztą, pamiętając o zapisie liczb w systemie szesnastkowym (Tabela 4).

$3738_{(10)}$ dzielenie z resztą

3738 : 16 = 233	r	**10**	**A**
233 : 16 = 14	r	**9**	**9**
14 : 16 = 0	r	**14**	**E**

Zatem $3738_{(10)} = E9A_{(16)}$

4.3 Dwójkowy i szesnastkowy.

Dwójkowy na szesnastkowy.

Konwersję liczby z systemu dwójkowego na szesnastkowy wykonujemy przy użyciu tabeli 4. Każda liczba składająca się z czterech cyfr w zapisie dwójkowym da się zapisać jako jedna cyfra w zapisie szesnastkowym (podstawa systemu szesnastkowego jest całkowitą potęgą podstawy dwójkowego). Konwersja polega na łączeniu cyfr w grupy o stałej długości i zamianie wewnątrz każdej grupy. Zatem rozbijamy liczbę w systemie dwójkowym na czteroznakowe fragmenty:

101110001001101 = (0101) (1100) (0100) (1101),

a następnie posługując się tabelą 4 przypisujemy każdej czwórce odpowiadającą jej cyfrę heksadecymalną:

(0101) (1100) (0100) (1101) = 5C4D

W powyższym przykładzie dodano na początku zero, by dopełnić ostatni fragment do pełnej czwórki (co nie zmienia wartości samej liczby).

Szesnastkowy na dwójkowy.

Konwersję liczby szesnastkowej na dwójkową wykonuje się odwrotnie. Kolejne cyfry w zapisie szesnastkowym zapisujemy jako cztery cyfry w zapisie dwójkowym. Każda cyfra w zapisie szesnastkowym odpowiada czterem cyfrom w zapisie dwójkowym (nie więcej i nie mniej). Można pozbyć się zer znajdujących się na najbardziej w lewo wysuniętej pozycji, aż znajdziesz tam jedynkę, gdyż kod binarny zawsze zaczyna się od 1.

		5	**C**	**4**	**D**	
5C4D	=	(0101)	(1100)	(0100)	(1101)	= 101110001001101

5. Materiały do zajęć.

5.1 Scenariusz I: Adres IP (działania w systemie dwójkowym).

Przedmiot	**Technologia informacyjna**	**Zakres czasu**
Temat zajęć	Adres IP (działania w systemie dwójkowym).	**-**
Czas trwania	45 min	-
Cele lekcji	Poznanie zasad reprezentacji liczb w systemach pozycyjnych o różnych podstawach.	-
Posiadana wiedza	Znajomość zasad działań w systemie pozycyjnym (dziesiątkowym).	-
Nabyte umiejętności	Uczeń nauczy się wykonywać proste działania arytmetyczne w systemie dwójkowym.	-
Rodzaj zajęć	Pytania – odpowiedzi, pogadanka na tle prezentacji, ćwiczenia praktyczne	-
Środki dydaktyczne	Rzutnik multimedialny, komputer, tablica, kalkulator prosty	-
Wykorzystane materiały	Treść rozdziału 2, prezentacja multimedialna „System dwójkowy”	-
Przebieg zajęć		
Nauczyciel rozdaje uczniom kartę pracy **(slajd 2)** do wyszukania informacji wstępnych na zajęcia. **Odpowiedzi** (na podstawie wikipedia.org): **Protokół:** W języku komputerowym *protokół (protocol)* jest to zbiór konwencji określających sposób przesyłania danych między różnymi programami. **Protokół TCP/IP:** Internet używa protokołu o nazwie TCP/IP *(Transmission Control Protocol/Internet Protocol)*.		15min

Cechy protokołu IP: ▪ bezpołączeniowy – nie ustawia w żaden sposób połączenia i nie sprawdza gotowości odległego komputera do odebrania przesyłanych danych, ▪ zawodnym – nie ma gwarancji, że przenoszenie zakończy się sukcesem, pakiety wysyłane z danego komputera do drugiego, mogą podróżować różnymi ścieżkami, niektóre z nich mogą zostać zgubione, zduplikowane, zatrzymane lub dostarczone z błędem, a system nie jest w stanie tego sprawdzić, a także nie powiadomi o tym ani nadawcy, ani odbiorcy. **Zadania IP:** ▪ definiowanie przesyłania danych, ▪ określenie dokładanego formatu wszystkich przesyłanych danych, ▪ definiowanie schematu adresowania używanego w całym Internecie ▪ wybieranie trasy (trasowanie, rutowanie), którą będą przesyłane dane, ▪ dokonywanie fragmentacji i ponownej defragmentacji danych. **Adres IP** to liczba nadawana interfejsowi sieciowemu, bądź całej sieci komputerowej opartej na protokole IP, służąca identyfikacji elementów warstwy trzeciej modelu OSI – w obrębie sieci oraz poza nią (tzw. *adres publiczny*). Adresy IP stosuje się nie tylko w Internecie, ale również w sieciach lokalnych korzystających z TCP/IP. Obecnie w Internecie używane są adresy IP protokołu w wersji czwartej, **IPv4**. Zapotrzebowanie na adresy IPv4 stało się na tyle duże, że pula nieprzydzielonych adresów zaczyna się wyczerpywać, z tego powodu powstała nowa, szósta wersja protokołu – **IPv6**. **Broadcast** – rozsiewczy (rozgłoszeniowy) tryb transmisji danych polegający na wysyłaniu przez jeden port (kanał informacyjny) pakietów, które powinny być odebrane przez wszystkie pozostałe porty przyłączone do danej sieci.	
(slajd 2 – 6) Nauczyciel opowiada o systemie pozycyjnym dwójkowym (binarnym), korzystając z materiałów rozdziału 2.	15min

(slajd 7) Adres IP umieszczony w pakiecie z danymi jest reprezentowany binarnie, składa się z 32 bitów i ma postać np.:
00001010 00001011 00001100 00001101
W celu ułatwienia użytkownikom posługiwanie się adresami IP ustalono, że na poziomie urządzenia sieciowego będzie on przedstawiony w zapisie dziesiątkowym. Aby zapisać powyższy adres IP w postaci dziesiątkowej należy pogrupować go w ośmiobitowe grupy (oktety), zamienić grupy bitów na liczby dziesiętne, a następnie wstawić pomiędzy nie kropki.

00001010 00001011 00001100 00001101
00001010 to w systemie dziesiętnym 10
00001011 to w systemie dziesiętnym 11
00001100 to w systemie dziesiętnym 12
00001101 to w systemie dziesiętnym 13

Zatem powyższy adres IP ma postać: 10.11.12.13

(slajd 8-9) Aby wyznaczyć adres rozgłoszeniowy (broadcast), należy pomiędzy adresem IP hosta (175.21.0.0), a negacją maski podsieci (255.255.0.0), dokonać binarnie operacji dodawania („OR"):

		Alternatywa	**Negacja**
a	**b**	**a OR b**	**NOT a**
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	0

broadcast = adres IP or ! maska

10101111 00010101 00010010 10001101 – adres IP hosta (175.21.0.0) **11111111 11111111 00000000 00000000** – maska podsieci **OR** **10101111 00010101 11111111 11111111** – adres rozgłoszeniowy Po zamianie na system dziesiętny otrzymujemy następujący adres rozgłoszeniowy: **175.21.255.255**	
Uczniowie rozwiązują zadanie **(slajd 10)**	15min

5.1.1 Zadania do samodzielnego rozwiązania.

1. Wykonaj działania arytmetyczne w systemie dwójkowym:

a) 110111 + 100101;	(odpowiedź: 1011100)
b) 110111 + 1011110110;	(odpowiedź: 1100101101)
c) 10101100 + 100101100;	(odpowiedź: 111011000)
d) 111001 − 1101;	(odpowiedź: 101100)
e) 101101 − 10001;	(odpowiedź: 11100)
f) 1100100010 − 100101100;	(odpowiedź: 111110110)
g) 10000000 − 1;	(odpowiedź: 1111111)
h) 11110000 − 1111;	(odpowiedź: 11100001)
i) 10101010 − 1010101;	(odpowiedź: 1010101)
j) 11 x 101;	(odpowiedź: 1111)
k) 1001 x 10;	(odpowiedź: 10010)
l) 1101 x 1011;	(odpowiedź: 10001111)
m) 111 x 111.	(odpowiedź: 110001)

2. Dane są liczby w systemie binarnym p = 1110; q = 10011; n = 11010. Obliczy:

a) q + n;	(odpowiedź: 101101)
b) q − p;	(odpowiedź: 101)
c) q · n;	(odpowiedź: 111101110)
d) p + n;	(odpowiedź: 101000)
e) n − q;	(odpowiedź: 101101)
f) p · q.	(odpowiedź: 100001010)

3. Przestaw adresy IP, zapisane w systemie binarnym, na użyteczne dla człowieka, czyli zapisane w systemie dziesiątkowym:

a) 11111111 00000000 00000000 00000000
   (odpowiedź: 255.0.0.0)
b) 11010000 01010000 10011000 00000010
   (odpowiedź: 208.16.152.2)

4. Znajdź adres rozgłoszeniowy adresu 212.51.219.32 z maską podsieci 255.255.255.192

Odpowiedź:

212.51.219.32	11010100 00110011 11011011 0100000
255.255.255.192	11111111 11111111 11111111 1100000
¬ 255.255.255.192	00000000 00000000 00000000 0011111

	11010100 00110011 11011011 0100000
OR	00000000 00000000 00000000 0011111
	_ _
	11010100 00110011 11011011 0111111

212.51.219.63

Pytania testowe.

1. Które wyrażenie określa najmniejszą porcję informacji w komputerze?
   a) bajt
   b) bit
   c) byt
   d) bejt
2. Bit to w komputerze:
   a) najmniejsza jednostka wagi
   b) największa jednostka informacji
   c) najmniejsza jednostka miary
   d) najmniejsza jednostka informacji
3. Jeden bajt to
   a) 2 bity
   b) 4 bity
   c) 8 bitów
   d) 16 bitów
4. Podstawą dziesiętnego systemu liczbowego jest:
   a) 10
   b) 16
   c) 8
   d) 2
5. System binarny to inaczej system:
   a) dziesiętny
   b) dwójkowy
   c) ósemkowy
   d) szesnastkowy
6. System dwójkowy to:
   a) system, którym operujemy na matematyce
   b) system liczenia w Polsce
   c) system liczenia, w którym używa się tylko dwóch liczb: 0 i 1
   d) system oceniania

7. Informacja „wewnątrz” systemów informatycznych zapisana jest w postaci:
   a) binarnej
   b) ósemkowej
   c) dziesiętnej
   d) szesnastkowej
8. Zamiana systemu binarnego na dziesiętny to:
   a) konwekcja
   b) konwersja
   c) konwencja
   d) konwersacja
9. W jaki sposób odczytamy liczbę po zamianie za system binarny?
   a) co drugą cyfrę
   b) od góry
   c) pierwsza i ostatnia cyfra
   d) od dołu
10. W systemie dwójkowym do zapisu liczby służą cyfry:
    a) 1 i 2
    b) 0 i 1
    c) 0 i 9
    d) 1 i 5
11. Liczba dwójkowa 1111 to w systemie dziesiętnym liczba:
    a) 9
    b) 10
    c) 13
    d) 15
12. Liczba dwójkowa 1101 to w systemie dziesiętnym liczba:
    a) 9
    b) 10
    c) 13
    d) 15

13. Która z liczb w systemie dwójkowym przedstawia liczbę 23 w systemie dziesiętnym?
    a) 11011
    b) 10111
    c) 11111
    d) 11101
14. 3_{10} to w systemie dwójkowym:
    a) 0011
    b) 0010
    c) 1010
    d) 1100
15. 10_{10} to systemie dwójkowym:
    a) 0011
    b) 0010
    c) 1010
    d) 1100
16. Liczba dziesiętna 27 to w systemie dwójkowym liczba:
    a) 11101
    b) 11110
    c) 11111
    d) 11011
17. Liczba dziesiętna 30 to w systemie dwójkowym liczba:
    a) 11110
    b) 11011
    c) 11111
    d) 11101
18. Jeden plus jeden to w systemie dwójkowym:
    a) 0
    b) 1
    c) 2
    d) 10

19. Jeżeli odejmiemy liczbę 3222 od 3533 po zamianie na system binarny otrzymamy:
    a) 100110111
    b) 10101011
    c) 1110001
    d) 110000111
20. Dane transmitowane poprzez Internet mają formę:
    a) pojedynczych bitów adresowanych nazwami domenowymi
    b) ramek adresowanych przy użyciu adresów kart sieciowych (MAC)
    c) pakietów adresowanych numerami IP
    d) elektronowej taśmy perforowanej

Odpowiedzi:

1 - b	2 - d	3 - c	4 - a	5 - b	6 - c	7 - a	8 - b	9 - d	10 - b
11 - d	12 - c	13 - b	14 - a	15 - c	16 - d	17 - a	18 - d	19 - a	20 - c

5.2 Scenariusz II: Konwersja liczb między systemem dziesiątkowym i szesnastkowym (dzielenie z resztą).

<table>
<tr><th>Przedmiot</th><th>Technologia informacyjna</th><th>Zakres czasu</th></tr>
<tr><td>Temat zajęć</td><td>Konwersja liczb między systemem dziesiątkowym i szesnastkowym.</td><td></td></tr>
<tr><td>Czas trwania</td><td>45 min</td><td>45 min</td></tr>
<tr><td>Cele lekcji</td><td>Uczeń wykorzysta algorytm dzielenia z resztą do konwersji liczb między systemami pozycyjnymi.</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Posiadana wiedza</td><td>Znajomość zasad działań w systemie pozycyjnym (dziesiątkowym).</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Nabyte umiejętności</td><td>Uczeń pozna szesnastkowy system pozycyjny. Nauczy się konwersji liczb z systemu dziesiątkowego na szesnastkowy i szesnastkowego na dziesiątkowy, wykorzystując algorytm dzielenia z resztą.</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Rodzaj zajęć</td><td>Pogadanka na tle prezentacji, ćwiczenia praktyczne</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Środki dydaktyczne</td><td>Rzutnik multimedialny, komputer, tablica, kalkulator prosty</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Wykorzystane materiały</td><td>Treść rozdziału 3 i 4.2, prezentacja multimedialna „System szesnastkowy”</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Przebieg zajęć</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Pogadanka
(slajd 2) Nauczyciel rozpoczyna lekcję od podania cyfr systemu szesnastkowego.
(slajd 3) Opowiada o zastosowaniu systemu szesnastkowego w technologii informacyjnej.
(slajd 4, 5) Następnie wprowadza ogólny zapis liczby w systemie szesnastkowym, wykorzystujący potęgi liczby 16, na podstawie którego pokazuje zamianę liczby zapisanej w systemie szesnastkowym na liczbę w systemie dziesiątkowym.
(slajd 6) Konwersję w przeciwną stronę nauczyciel demonstruje</td><td>10min</td></tr>
</table>

wykorzystując zapis ogólny i tabelę potęg liczby 16. **(slajd 7)** Przypomina zasadę dzielenia liczby z resztą i podaje przykład zastosowania przy konwersji liczby 3738. Odpowiada na pytania uczniów.	
(slajd 8) Nauczyciel nakłania uczniów do opisania algorytmu postępowania przy konwersji: dana wyjściowa: liczba$_{(10)}$; wynik: liczba$_{(16)}$. Według algorytmu uczniowie wykonują „ręcznie” ćwiczenia zamiany liczb.	20min
(slajd 9 – 11) Nauczyciel demonstruje uczniom konwertery liczb, zaczynając od najprostszego – kalkulatora w systemie Windows, na stronie internetowej i gry firmy Cisco.	15min

5.2.1 Zadania do samodzielnego rozwiązania.

1. Dokonaj konwersji zapisu liczb z systemu dwójkowego na liczby w systemach o podstawach 4, 8, 16:
   a) 111000;
   b) 1011101;
   c) 111000;
   d) 11001100;
   e) 101010.

2. Dokonaj konwersji zapisu liczb z systemu o podstawie 16 na liczby w systemach o podstawach 2, 8, 10:
   a) 307;
   b) FFF;
   c) 1AB;
   d) BAB.

3. Konwersja zapisu heksadecymalnego na zapis RGB polega na zapisywaniu dziesiętnych wartości każdej pary cyfr, np. 0F AB 40 = RGB (15, 171, 64). Kolor różowy w systemie szesnastkowym zapisany jest FF C0 CB. Jak będzie wyglądał w zapisie RGB?
   (odpowiedź: 255 192 203)

4. Sprawdź adres IP swojego komputera. Jak będzie wyglądał zapisany w systemie szesnastkowym?
   (odpowiedź: np. Adres IP 192.168.2.121 to C0.A8.2.79)

5. Adres serwisu IPv4 *wikipedia.org* to liczba 3 494 942 722, która w zapisie szesnastkowym ma postać D0 50 98 02. Adres w postaci szesnastkowej zapisywany jest jako D0:50:98:02, z której można przekształcić go na łatwiejszą do zapamiętania formę dziesiętną, oddzielaną już kropkami: 208.80.152.2. Zapisz w postaci szesnastkowej i w formie dziesiętnej adres IP: 1 389 133 879.
   (odpowiedź: 52:CC:80:37; 82.204.128.55)

5.2.2 Pytania testowe.

1. Która z liczb oznacza liczbę 10 zapisaną w systemie dwójkowym?
   a) 1010
   b) 1001
   c) 1100
   d) 0110
2. Na rysunku przedstawiono schemat pewnego działania związanego z systemami liczbowymi. Jest to schemat:
   a) rozkładu liczby 11 na czynniki pierwsze
   b) zamiany liczby binarnej na dziesiętną
   c) szukania największego wspólnego dzielnika liczb 2 i 11
   d) zamiany liczby dziesiętnej na binarną

11:2	1
5:2	1
2:2	0
1	1 ↑

3. Z poniższych liczb wybierz tę, która ma największą wartość:
   a) $128_{(10)}$
   b) 7F $_{(16)}$
   c) $177_{(8)}$
   d) $1111111_{(2)}$

4. Z poniższych liczb wybierz tę, która ma najmniejszą wartość:
    a) $11_{(10)}$
    b) $11_{(16)}$
    c) $11_{(8)}$
    d) $11_{(2)}$
5. Która para liczb, dziesiętna i binarna, jest sobie równa:
    a) 20 i 11001
    b) 22 i 10101
    c) 21 i 11100
    d) 19 i 10011
6. Z poniższych liczb, wybierz tę, która ma inną wartość od pozostałych:
    a) $15_{(10)}$
    b) $F_{(16)}$
    c) $15_{(8)}$
    d) $1111_{(2)}$
7. System liczbowy oparty na dziesięciu cyfrach i sześciu literach nazywamy:
    a) literowo-cyfrowym
    b) mieszanym
    c) heksagonalnym
    d) haksadecymalnym
8. W jakim z systemów nie jest zapisana liczba 457:
    a) siódemkowym
    b) ósemkowym
    c) dziesiątkowym
    d) szesnastkowym
9. W technice komputerowej najczęściej wykorzystywany jest system liczbowy:
    a) rzymski
    b) piątkowy
    c) dwójkowy
    d) czwórkowy

10. Liczba FF w systemie heksadecymalnym to w systemie dziesiątkowym:
    a) 30
    b) 255
    c) 256
    d) 1515
11. Liczba $6B1_{16}$ po przeliczeniu na system dziesiętny ma wartość równą:
    a) 142
    b) 1713
    c) 567
    d) 6111
12. W skład systemu szesnastkowego wchodzą liczby z zakresu:
    a) 0– 9 i A-F
    b) 0-15
    c) A-P
    d) I, V, X, M, L, C
13. Liczba 323_{10} po przeliczeniu na system szesnastkowy ma wartość równą:
    a) A31
    b) 512
    c) 143
    d) ABC
14. Algorytm to:
    a) ciąg dowolnych czynności koniecznych do wykonania pewnego rodzaju zadań
    b) skończony, uporządkowany ciąg jasno zdefiniowanych czynności, koniecznych do wykonania
    c) skończony, nieuporządkowany ciąg czynności, koniecznych do wykonania pewnego rodzaju zadań pewnego rodzaju zadań
    d) system komputerowy
15. Format kolorów heksadecymalnych opiera się o trzy kolory podstawowe:
    a) czarny, szary, biały
    b) czerwony, zielony, niebieski
    c) niebieski, żółty, zielony
    d) czerwony, czarny, różowy

16. Kolor czerwony zapisany w systemie hex to:
    a) #FF 00 00
    b) #00 FF 00
    c) #00 00 FF
    d) #FF FF FF
17. #00 00 00 to zapis koloru:
    a) białego
    b) czarnego
    c) niebieskiego
    d) szarego
18. Liczbę BABA w systemie szesnastkowym czytamy:
    a) baba
    b) b, a, b, a
    c) 11, 10, 11, 10
    d) żadna z odpowiedzi nie jest prawidłowa
19. Który skrót oznacza system szesnastkowy:
    a) hex
    b) dec
    c) oct
    d) bin
20. Liczba F3 A4 56 BC w systemie szesnastkowym ma:
    a) 8 bitów
    b) 16 bitów
    c) 24 bity
    d) 32 bity

Odpowiedzi:

1 - a	2 - d	3 - a	4 - d	5 - d	6 - c	7 - d	8 - a	9 - c	10 - c
11 - b	12 - a	13 - c	14 - b	15 - b	16 - a	17 - b	18 - b	19 - a	20 - d

Podsumowanie.

„Computo, ergo sum.” Obliczam wiec jestem!

John Wheeler, fizyk z Princeton University

Komputery mogą przetwarzać tylko takie dane, które są w formacie dwustanowym – binarnym. Gdy komputer wysyła przez sieć informacje o stanie włączonym lub wyłączonym, są one zamieniane na sygnały elektryczne, świetlne lub radiowe, reprezentujące zera i jedynki – każdemu znakowi jest przypisany unikalny wzór złożony z ośmiu cyfr dwójkowych.

Kod binarny stosuje się do komunikowania tam-tamami. Binarny charakter ma alfabet Morse’a, w którym korzysta sie z kropki – krótki sygnał i kreski – długi sygnał. Współcześnie kod binarny okazał sie uniwersalnym kodem, w którym zapisujemy wszystko to, co daje sie zapisać. Juz nie tylko liczby, lecz również teksty, obrazy i muzykę. Kodem tym zapisany jest ta praca w wersji elektronicznej. Kodem tym można zapisać teksty nie tylko w języku polskim, lecz w każdym innym.

Niekiedy liczby dwójkowe są zamieniane na cyfry szesnastkowe (heksadecymalne), które są krótsze od odpowiadających im liczb dwójkowych dzięki zastosowaniu znaków szesnastkowych – łatwiej je zapamiętać i operować na nich.

Cyfry i liczby dwójkowe, szesnastkowe są dla komputera, ze względu na specyfikę budowy, czymś naturalnym. Ludzie używają systemu dziesiątkowego, który wygląda przystępniej w porównaniu z długimi seriami zer i jedynek, czytanych przez komputery. Liczby dwójkowe używane przez komputer są zamieniane na czytelne liczby dziesiętne.

Bibliografia.

1. Jakubowska M. „*Kodowanie informacji w systemach cyfrowych*”, AGH, Kraków 2002
   http://www.astro.uni.wroc.pl/ludzie/rudawy/F90lect/F90_rok2005.pdf
2. Krysicki W. „*Jak liczono dawniej, a jak liczymy dziś*”, Nasza Księgarnia, Warszawa1979
3. Trzesicki K. *„Leibnizjanskie inspiracje informatyki”*, UwB, Białystok 2010
   http://logika.uwb.edu.pl/KT/Leibnizjanskie%20inspiracje%20informatyki.pdf
4. Wójcik R., „*Wprowadzenie do inżynierii przetwarzania informacji”*, Wrocław 2007
   http://staff.iiar.pwr.wroc.pl/robert.wojcik/dydaktyka/cop/ipi/wstep_ipi.pdf